Числа Фибоначчи. Повторение.

Хорошо забытое старое

1. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ «да» надо заплатить 2 рубля, за ответ «нет» — 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка отгадать число?

2. На почте есть $k+1$ гирька: 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, $\ldots$, 2^k г. Перед отправлением посылки весом в x граммов работник почты проверяет её вес на чашечных весах, причём гирьки он может класть на обе чаши. Каждое такое взвешивание занимает у работника почты ровно одну минуту. За какое время работник гарантированно справится с проверкой веса, если он проверяет его всеми возможными способами?

3. Найдите число решений в натуральных числах уравнения $(x^2-xy-y^2)^2=1$ таких, что $x, y < 2021$.

4. Докажите, что $F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

5. **(a)** Докажите, что для любого n найдётся число Фибоначчи, кратное n.
(b) Докажите, что существует число Фибоначчи, оканчивающееся на 9999.
(c) Дано простое число p. Докажите, что среди любых $p+1$ последовательных чисел Фибоначчи найдётся кратное p.

6. Даны натуральные $a, b > 2$. Докажите, что
(a) если a делится на b, то F_a делится на F_b;
(b) если F_a делится на F_b, то a делится на b.

7. Докажите, что $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

И новое тоже

8. Ваня взял прямоугольник со сторонами a и b, где $a > b$. После чего начал отрезать от него квадраты. Каждый раз отрезается квадрат со стороной, равной меньшей стороне. Оказалось, что за n таких операций все отрезанные квадраты были разными. Какие сейчас стороны у прямоугольника?

9. Пусть $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение. Докажите тождества $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$ и $(\frac{-1}{\varphi})^n = F_{n-1} - \frac{F_n}{\varphi}$.

10. Докажите, что можно сделать набор из 10 гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 55 граммов включительно даже в том случае, если одна гирька потеряна (гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую).

11. Пусть F_n —- последовательность Фибоначчи. Докажите, что число F_n+1 составное для всех натуральных чисел $n > 3$.

12. Докажите, что если $1 \leqslant m < F_{t+1}$ и k — целые, то $|\frac{m}{\varphi} - k| \geqslant (\frac{1}{\varphi})^t$