Перестановки

1. У Артёма есть колода игральных карт и любимый способ её тасовать. Однажды Артём взял колоду, в которой все карты идут по порядку, и старательно перетасовал её 52! раз (каждый раз одним и тем же способом). Докажите, что карты в колоде снова оказались разложены по порядку.

2. В ряд выложены 33 карточки с буквами от «А» до «Я». Робот умеет перекладывать их каким-то одним определённым способом, при этом надписи на карточках он не читает. Изначально карточки лежат в алфавитном порядке. Робота запустили 2002 раза, и на 2002 раз впервые все карточки одновременно вернулись на свои места. Докажите, что робота можно запустить ещё несколько раз так, чтобы на своих местах остались ровно $\frac{2}{3}$ карточек.

3. У Лизы есть колода из 104 карточек, пронумерованных числами от 1 до 104, и любимый способ её тасовать. Однажды Лиза взяла колоду, в которой карточки были выложены по возрастанию, и перетасовала её. Потом она решила, что этого недостаточно, и перетасовала колоду ещё раз (точно таким же способом). Могло ли так случиться, что в результате этого
(a) нижняя и верхняя карты поменялись местами, а все остальные оказались на изначальных местах?
(b) нижняя карта оказалась самой верхней, а порядок остальных 103 карт не изменился?
(c) колода упорядочилась по убыванию?
(d) верхние 52 карты «скрестились» с нижней половиной, то есть верхние карты с числами от 1 до 52 идут под чётными номерами в том же порядке, а карты с числами от 53 до 104 — под нечётными номерами также без изменения порядка?

4. В ряд выписаны n различных чисел. За одну операцию разрешается поменять местами любые два числа. За какое наименьшее количество операций гарантированно удастся расположить числа по возрастанию?

5. Петя придумал комбинацию поворотов кубика Рубика, изменяющую его, а потом взял собранный кубик и повторил эту комбинацию поворотов
(a) 101 раз.
(b) 13 раз.
Докажите, что он не мог получить такой же собранный кубик.

6. На конференцию по теории групп собрались n учёных. Организаторы напечатали для каждого бейджик с его именем, но раздали их учёным в перепутанном порядке. Доклады на конференции скучные, и поэтому в это время учёные могут переписываться, но не могут обмениваться бейджиками (это невежливо). За один перерыв между докладами каждый учёный может обменяться бейджиком с другим (но только один раз, перерыв короткий). Докажите, что учёные могут сделать так, чтобы к началу третьего доклада у каждого из них был правильный бейджик.

7. Дано простое число p. Для каждого натурального $0 < a < p$ перестановка чисел от 0 до $p-1$, помещающая на место x остаток $ax+1$ при делении на p, считается хорошей. Существует ли перестановка (не обязательно хорошая сама по себе), повторяя которую несколько раз, можно получить любую хорошую перестановку?