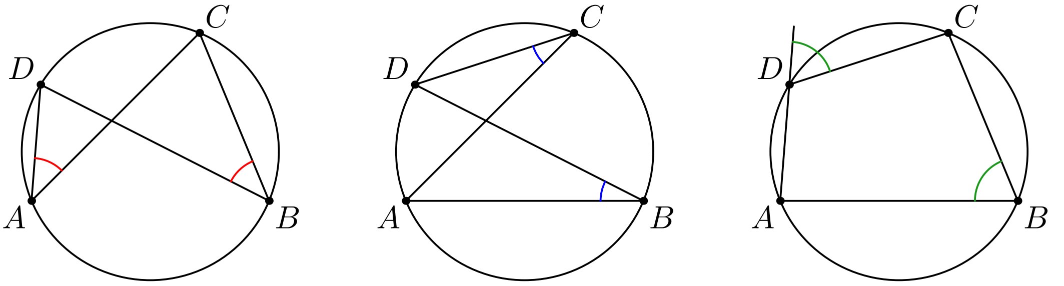
Вписанные четырёхугольники

Теорема. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из эквивалентных условий:

(1) $\angle CAD = \angle CBD$; **(2)** $\angle ABD = \angle ACD$; **(3)** $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.



1. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки P и Q соответственно. Оказалось, что четырехугольник $APQD$ вписанный. Докажите, что четырехугольник $BPQC$ вписанный.

2. Внутри треугольника ABC отмечена точка P, а на сторонах BC, CA, AB — точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что если два из трех четырехугольников AB_1PC_1, BC_1PA_1, CA_1PB_1 вписанные, то третий тоже вписанный.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина дуги AB, не содержащей точек C и D. Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB, DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.

4. Точка O — центр описанной окружности равнобокой трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), K — точка пересечения её диагоналей. Докажите, что точки A, B, K, O лежат на одной окружности.

5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что CO — биссектриса прямого угла.

6. В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle A = 60°$ отмечены точки H, I, O — ортоцентр и центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника HIO проходит через вершину B.

7. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка P, что выполняются равенства
$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$
Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке: внутренние биссектрисы углов ADP и PCB и серединный перпендикуляр к отрезку AB.