

Вписанные углы. Добавка

1. Вершины четырехугольника лежат на одной окружности, а его диагонали равны. Докажите, что у этого четырехугольника есть пара параллельных сторон.
2. Точка D — симметрична вершине A остроугольного треугольника ABC относительно BC . Отрезки BD и CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q . Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ .
3. Точки M и N — середины «меньших» дуг AB и BC описанной окружности треугольника ABC соответственно. Точка K — середина «большой» дуги AC . Отрезки AN и CM пересекаются в точке I . Докажите, что $KMIN$ — параллелограмм.
4. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка P , что

$$\angle BPC = \angle BAC + 60^\circ, \quad \angle CPA = \angle CBA + 60^\circ, \quad \angle APB = \angle ACB + 60^\circ.$$

Лучи AP , BP , CP продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC . Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.

5. **Лемма о трезубце.** Пусть I и I_A — центры вписанной и невписанной (касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC) окружностей треугольника ABC соответственно. Докажите, что точки B , C , I , I_A лежат на одной окружности с центром в середине «меньшей» дуги BC описанной окружности треугольника ABC .