

Множества

1. На конгресс приехало 100 учёных, каждый знает три языка. Оказалось, что любые четверо из них могут общаться на одном языке. Докажите, что и любые пятеро из них могут общаться на одном языке.
2. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовал хотя бы один школьник этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в 5% всех экскурсий.
3. (a) В музее размещено n шедевров супрематизма. Изучив эти шедевры, искусствовед Иванов установил, что для рисования всех этих картин вместе использовано 100 цветов и наборы цветов у любых двух картин различны. Оказалось, что нет цвета, присутствующего на всех картинах, но для любых двух картин найдётся общий цвет. При каком наибольшем n такое возможно?

(b) В этом же музее размещён 2021 шедевр фовизма. Изучив эти шедевры, искусствовед Иванов установил, что для рисования всех этих картин вместе использовано k цветов и наборы цветов у любых двух картин различны. Снова оказалось, что нет цвета, присутствующего на всех картинах, но для любых двух картин найдётся общий цвет. При каком наименьшем k такое возможно?
4. Студентам ФПМИ раздали карточки с натуральными числами от 1 до 100. Оказалось, что в сумме у любых двух студентов есть все карточки с числами от 1 до 100. Какое максимальное число человек может учиться на ФПМИ, если каждый студент получил не более одной карточки каждого вида и у любых двух студентов наборы карточек разные?
5. В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад.