Степени вхождения

Определение *Степенью вхождения* простого числа p в натуральное число n будем называть наибольшее такое k, что n делится на p^k. Обозначать для краткости будем $\nu_p(n)$ (это греческая буква «ню»)

1. Докажите следующие свойства:
(a) $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$;
(b) $\nu_p(a+b) \geqslant \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$, причём если $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, то достигается равенство.

2. Числа a, b, c, d и k — натуральные. Докажите, что если числа ab, cd и $(b+c)(a+d)$ делятся на k, то ac и bd делятся на k.

3. Натуральные числа a и b таковы, что сумма $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}$ целая. Докажите, что оба слагаемых целые.

4. Натуральные числа m, n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ кратно mn. Докажите, что m — квадрат натурального числа.

5. **Формула Лежандра.** Докажите, что

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$$

6. Докажите, что $n!$ никогда не делится на 2^n.

7. Докажите, что произведение всех целых чисел от $3^{1001}+1$ до $3^{2021}-1$ включительно не есть квадрат целого числа.