# Повторение

## Хорошо забытое старое

**1.** В компании, состоящей из конечного числа мальчиков и девочек, *общительной группой мальчиков* называется такая группа мальчиков, что каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы; *общительной группой девочек* называется такая группа девочек, что каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Докажите, что количество общительных групп мальчиков и количество общительных групп девочек имеют одинаковую четность. (Знакомство считается взаимным.)
*Подсказка. Для множества девочек $A$ определим $S_A$ — количество множеств мальчиков, не знакомых ни с кем из $A$. Аналогично для множества мальчиков $B$ определим количество множеств девочек $T_B$, не знакомых ни с кем из $B$. С помощью формулы включений и исключений через $S_A$ и $T_B$ можно выразить количество общительных групп. Теперь остаётся задуматься о чётности.*

**2.** Известно, что $k^{33}$ заканчивается на 0001. На что может заканчиваться само $k$?

**3.** Докажите, что $k^2 + k + 1$ не может делиться на 101 ни при каком целом $k$.

**4.** Докажите, что при любом четном $n$ число $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.

**5.** Пусть $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ — все делители числа $n$. Докажите, что

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_k) = n.$$

*Указание: может быть, вам поможет посмотреть на $\varphi(d_i)$ как на количество каких-то чисел от 1 до $n$. А может быть, вам поможет задача 1c.*

**6.** Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа $n$ существуют ровно $n$ карточек, на которых написаны делители этого числа. Докажите, что каждое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

## Новое

**7.** Кафтан площадью 1 покрыт пятью заплатами площадью $\frac{1}{2}$ каждая.
**(a)** Докажите, что найдутся две заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше, чем $\frac{3}{20}$
**(b)** Докажите, что найдутся две заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше, чем $\frac{1}{5}$
**(c)** Докажите, что найдутся три заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше, чем $\frac{1}{20}$

**8.** Доказать, что количество способов разложить $n$ различных шаров по $k$ различным коробкам так, чтобы ни одна коробка не осталась пустой, равно $\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^{k+j} \cdot C_k^j \cdot j^n$.

**9.** Докажите, что при любом натуральном $n$ число
**(a)** $2^n - 1$ не делится на $n$.
**(b)** $3^n - 2^n$ не делится на $n$.

**10.** Докажите, что все, кроме единицы, делители числа $\frac{1}{5}(2^{101} + 3^{101})$ больше, чем 200.