

Повторение.

Старое

1. Дан остроугольный треугольник ABC . Окружность с диаметром AB пересекает высоту из вершины C в точках P и Q . Окружность с диаметром AC пересекает высоту из вершины B в точках X и Y . Докажите, что точки P, Q, X, Y лежат на одной окружности.
2. Дана точка P вне окружности ω . Точки M и N — середины касательных PA и PB к ω (точки A и B лежат на ω). На прямой MN выбрана точка X . Докажите, что длина касательной из X к ω равна длине отрезка PX .
3. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC взяты точки X и Y соответственно. На отрезках CX и AY как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что общая хорда ω_1 и ω_2 проходит через ортоцентр треугольника ABC .
4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , лучи AD и BC — в точке Q . Докажите, что:
 - (а) (Прямая Гаусса) середины отрезков AC, BD и PQ лежат на одной прямой.
 - (б) (Прямая Обера) ортоцентры треугольников APD, ABQ, BPC, CQD лежат на одной прямой.
 - (с) Прямые Гаусса и Обера перпендикулярны.
5. Существует ли квадратный трёхчлен, все значения которого в натуральных точках — степени двойки?
6. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшиеся обойти конем (побывав на каждой по одному разу)?
7. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали квадрат (со сторонами, параллельными линиям клеток).

Новое

8. Через центр I вписанной в неравносторонний треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке K . Из точки I на прямую AK опущен перпендикуляр ID . Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.
9. Окружности ω_1 и ω_2 построены на медианах AM и BN треугольника ABC как на диаметрах. Докажите, что C лежит на прямой, соединяющей точки пересечения ω_1 и ω_2 .
10. Существует ли квадратный трёхчлен, все значения которого в натуральных точках — кубы натуральных чисел?
11. Дана выпуклая центрально-симметричная фигура площади больше 4 с центром в целой точке. Докажите, что она содержит целую точку, отличную от центра