Повторение

Хорошо забытое старое

1. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами найдётся такое целое число k, что число $|P(k)|$ будет составным.

2. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 1 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

3. Пусть несократимая дробь $\frac{a}{b}$ — корень многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что при любом целом k значение $P(k)$ делится на $bk - a$.

4. У многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами значения в точках $x = 1, 2, \ldots, 2021$ — это числа $1, 2, \ldots, 2021$ в некотором порядке.
(a) Докажите, что этот порядок либо строго убывающий, либо строго возрастающий
(b) Может ли степень $P(x)$ быть равна 1000?

И новое тоже

5. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что существует бесконечно много таких простых чисел q, что $P(n)$ делится на q для какого-то натурального n, если
(a) $P(0) = 1$;
(b) $P(0)$ — произвольное целое число.

6. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше 1000 и $P(19) = P(95) = 1995$.

7. Назовём многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами *разнообразным*, если для любых натуральных m и n найдётся такое целое a, что $P(a^m)$ делится на n. Докажите, что все разнообразные многочлены — это многочлены, у которых или 0, или 1 является корнем.

8. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(2^n)$ делится на n для любого натурального n?