Формула включений и исключений.

1. Сколько существует n-значных чисел, в записи которых присутствуют все цифры 1, 2, 3 и больше никаких?

2. Куб со стороной 10 разбит на 1000 кубиков с ребром 1. В каждом кубике записано число, при этом сумма чисел в каждом столбике из 10 кубиков (в любом из трёх направлений) равна 0. В одном из кубиков (обозначим его через A) записана единица. Через кубик A проходит три слоя, параллельных граням куба (толщина каждого слоя равна 1). Найдите сумму всех чисел в кубиках, не лежащих в этих слоях.

3. Все натуральные числа покрасили в чёрный и белый цвет. Можно задавать вопросы вида: «Сколько белых делителей у числа k?»
У числа n ровно 10 простых делителей. Как за 1024 вопроса узнать его цвет?

4. **(Формула включений и исключений)** На олимпиаде дети решали n задач. Для каждого набора задач посчитали, сколько человек решило каждую из них. Обозначим P количество людей, решивших хоть одну задачу. Обозначим через S_i сумму всех чисел для наборов, в которых ровно i задач. Докажите, что

$$P = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots + (-1)^{k-1}S_k + \ldots + (-1)^{n-1}S_n.$$

5. **(a)** Шесть; **(b)** n человек уселись за столом. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы никто не оказался на своём месте?

6. Число n имеет простые делители $p_1, p_2, \ldots p_k$. С помощью формулы включений и исключений докажите, что

$$\frac{\phi(n)}{n} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

7. В компании, состоящей из конечного числа мальчиков и девочек, *общительной группой мальчиков* называется такая группа мальчиков, что каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы; *общительной группой девочек* называется такая группа девочек, что каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Докажите, что количество общительных групп мальчиков и количество общительных групп девочек имеют одинаковую четность. (Знакомство считается взаимным.)