Функция Эйлера

Будем обозначать через $\varphi(n)$ количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Функция φ называется функцией Эйлера.

1. В таблицу $a \times b$ (a строк, b столбцов) выписали подряд слева-направо, сверху-вниз числа от 1 до ab, причем НОД$(a, b) = 1$.
(a) Сколько в таблице чисел, взаимно простых с b?
(b) Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с a?
(c) Докажите, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

2. **(a)** Докажите, что $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ для любого простого числа p и натурального k.
(b) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — разложение числа n на простые множители. Докажите, что

$$\varphi(n) = (p_1 - 1) \ldots (p_k - 1) \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} \ldots p_k^{\alpha_k - 1}.$$

3. Найдите все натуральные n такие, что
(a) $\varphi(n) = 4$.
(b) $\varphi(n) = n - 1$.
(c) $\varphi(n) = \frac{n}{3}$.

4. Пусть НОД$(a, b) > 1$. Что больше: $\varphi(ab)$ или $\varphi(a)\varphi(b)$?

5. Дано натуральное число a.
(a) Докажите, что у уравнения $\varphi(x) = a$ конечное число решений.
(b) Всегда ли у уравнения $\varphi(x) = a$ есть хотя бы одно решение?

6. Пусть $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ — все делители числа n. Докажите, что

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_k) = n.$$

Указание: может быть, вам поможет посмотреть на $\varphi(d_i)$ как на количество каких-то чисел от 1 до n. А может быть, вам поможет задача 1с.

7. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Докажите, что каждое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

8. **(a)** Для всех натуральных n докажите неравенство

$$\frac{\varphi(1)}{2^1 - 1} + \frac{\varphi(2)}{2^2 - 1} + \ldots + \frac{\varphi(n)}{2^n - 1} < \frac{2^{n!+1}}{2^{n!} - 1}.$$

(b) Для всех натуральных n докажите неравенство

$$\frac{\varphi(1)}{2^1 - 1} + \frac{\varphi(2)}{2^2 - 1} + \ldots + \frac{\varphi(n)}{2^n - 1} < 2.$$