

Теорема Пифагора и теорема Карно

- (a) В треугольнике ABC проведена высота BH . Докажите, что $AB^2 - BC^2 = AH^2 - HC^2$.

(b) Даны точки A, B на плоскости и вещественное число c . Докажите, что геометрическое место точек P таких, что $AP^2 - BP^2 = c$ — прямая, перпендикулярная AB .

(c) Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.
- В шестиугольнике $ABCDEF$: углы A и C — прямые, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Докажите, что прямые DF и BE перпендикулярны.
- Через вершины B и C треугольника ABC перпендикулярно прямой BC проведены прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекают прямые b и c соответственно в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC .
- Диагонали описанного четырехугольника перпендикулярны. Обязательно ли у него есть две пары равных сторон?
- В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка X . Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Перпендикуляр, опущенный из M на AH , пересекается с перпендикуляром, опущенным из N на CH , в точке P . Докажите, что точка P равноудалена от точек A и C .
- (a) **Теорема Карно.** Дан треугольник ABC . На сторонах BC, AC, AB взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что перпендикуляры к сторонам, восстановленные в A_1, B_1, C_1 , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + CB_1^2 + BA_1^2$.

(b) То же, что в пункте (a), но теперь A_1, B_1, C_1 — произвольные точки плоскости.
- Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей треугольника на соответствующие стороны, пересекаются в одной точке.
- A', B', C' — основания перпендикуляров из вершин A, B, C треугольника ABC на прямую ℓ . Докажите, что перпендикуляры из A', B', C' на BC, AC, AB пересекаются в одной точке.
- Докажите, что перпендикуляры к сторонам, восстановленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда треугольник — равнобедренный.