

Иррациональные числа.

- Докажите, что числа
 - $\sqrt{2}$;
 - $\sqrt[3]{5}$;
 - $\sqrt{2} + \sqrt{3}$;
 - $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$;
 - $\sqrt{7} + \sqrt[3]{5}$иррациональные.
- Натуральные числа a и b таковы, что $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. Докажите, что $\frac{a}{b} > \sqrt{2} + \frac{1}{4b^2}$.
- Сумма и произведение двух чисел рациональны. Обязательно ли сами числа рациональны?
- (Теорема Дирихле)** (a) Дано иррациональное число α . Докажите, что для любого натурального N существуют такие целые p и q , что $1 \leq q \leq N$ и $|p - q\alpha| < \frac{1}{N}$.
(b) Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных p и q , что $|\frac{p}{q} - \sqrt{d}| < \frac{1}{q^2}$.
- (Теорема Кронекера)** Дано иррациональное α и действительные $0 \leq a < b \leq 1$. Докажите, что существует такое натуральное n , что $a < \{n\alpha\} < b$.