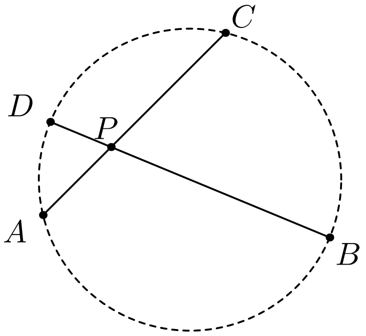
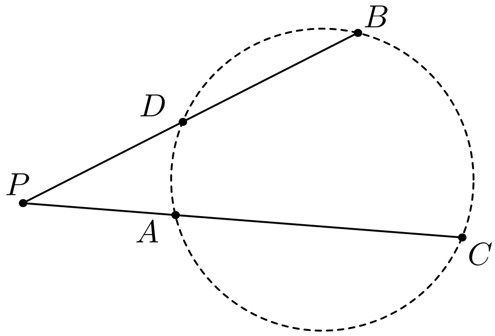
Степень точки





1. Для обеих картинок сверху докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.

Определение. Степенью точки P относительно окружности ω называется величина $\pm PA \cdot PC$, где A и C — точки пересечения произвольной секущей через точку P с окружностью ω. Если точка P лежит вне окружности, то произведение берётся со знаком «+», а если внутри — то со знаком «−».

2. Докажите, что для точки вне окружности её степень равна квадрату длины отрезка касательной к этой окружности.

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. На продолжении отрезка AB взята точка P. Докажите, что длины касательных из P к ω_1 и ω_2 равны.

4. Дан треугольник ABC. Окружность ω_1 проходит через вершины A и B и касается прямой AC. Окружность ω_2 проходит через вершины C и B и касается прямой AC. Докажите, что точки пересечения ω_1 и ω_2 лежат на медиане BM.

5. Пусть AB и CD — общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 (точки A и C лежат на ω_1, точки B и D лежат на ω_2). Точка M — середина AB. Отрезок MC пересекает ω_1 в точке P, отрезок MD пересекает ω_2 в точке Q. Докажите, что точки C, D, P, Q лежат на одной окружности.

6. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке P, причём $\angle APB < 90°$. Докажите, что длины отрезков касательных, проведённых из точки P к окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.

7. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность с диаметром AB пересекает высоту из вершины C в точках P и Q. Окружность с диаметром AC пересекает высоту из вершины B в точках X и Y. Докажите, что точки P, Q, X, Y лежат на одной окружности.