Теорема Безу. Часть вторая

1. Пусть $P(x), Q(x)$ — многочлены, $\deg P(x) = 20$, $\deg Q(x) = 22$. Какое наибольшее количество точек пересечения может быть
(a) у графиков $y = P(x)$ и $y = Q(x)$;
(b) у графика $y = P(x)$ и прямой;
(c) у графика $y = P(x)$ и окружности?

2. В памяти Бориса хранятся 100 вещественных чисел. Борис увеличил все числа на 1 и обнаружил, что их произведение не изменилось. Он снова увеличил все числа на 1, и опять произведение не изменилось, и так далее. Всего Борис повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение не менялось. При каком наибольшем k такое возможно?

3. Функция $f(x)$ называется *чётной*, если $f(a) = f(-a)$ для любого действительного a, и *нечётной*, если $f(a) = -f(-a)$.
(a) Докажите, что многочлен $P(x)$ задаёт чётную функцию если и только если все его коэффициенты при нечётных степенях равны нулю, т.е. $P(x) = a_{2k}x^{2k} + a_{2k-2}x^{2k-2} + \ldots + a_2x^2 + a_0$.
(b) Докажите, что многочлен $P(x)$ задаёт нечётную функцию если и только если все его коэффициенты при чётных степенях равны нулю, т.е. $P(x) = a_{2k+1}x^{2k+1} + \ldots + a_3x^3 + a_1x$.

4. Множество из 2000 последовательных натуральных чисел назовём подозрительным, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Докажите, что существует лишь конечное число подозрительных множеств.

5. Многочлен x^3+px^2+qx+r имеет на интервале $(0, 2)$ три корня. Докажите, что $-2 < p + q + r < 0$.

6. Дан многочлен $P(x)$ степени 3 с действительными коэффициентами. Тройка $\{a, b, c\}$ различных вещественных чисел называется циклической, если $a = P(b)$, $b = P(c)$ и $c = P(a)$.
(a) Докажите, что не бывает 9 различных циклических троек.
(b) Докажите, что не бывает 4 различных циклических троек с одинаковой суммой.

7. **(a)** Даны два многочлена: $P(x)$ и $Q(x)$. Известно, что каждый из них задаёт чётную функцию. Докажите, что остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$ тоже задаёт чётную функцию.
(b) Даны два многочлена: $P(x)$ и $Q(x)$. Известно, что каждый из них задаёт нечётную функцию. Докажите, что остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$ тоже задаёт нечётную функцию.