Раскраски графов

Раскраска вершин графа в несколько цветов называется *правильной*, если никакие две вершины одного цвета не соединены ребром.

1. Степень любой вершины графа не превосходит n. Докажите, что его можно покрасить в $n+1$ цвет правильным образом.

2. Дан граф на n пронумерованных вершинах. Известно, что его можно правильно покрасить в 11 цветов единственным (с точностью до перенумерации цветов) образом. Докажите, что в нём не менее $5n$ рёбер

3. В графе 1000 вершин, причем степень каждой не больше 9. Докажите, что можно выбрать такой подграф на 200 вершинах, что в нем не будет нечетных циклов.

4. Рёбра графа покрашены в два цвета так, что не существует одноцветных нечётных циклов. Докажите, что вершины графа можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

5. Степень любой вершины графа не превосходит d. Докажите, что вершины этого графа заведомо можно покрасить в d^2+1 цвет так, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами одинакового цвета было больше двух. (Расстоянием между двумя вершинами графа называется число рёбер в самом коротком пути, соединяющем эти две вершины.)

6. **(a)** В графе не более $2n-2$ вершин и нет треугольников. Докажите, что граф можно правильным образом покрасить в n цветов.
(b) В графе нет треугольников, а среди любых n рёбер есть два, выходящих из одной вершины. Докажите, что граф можно правильным образом покрасить в n цветов

7. В вершинах связного графа можно так расставить натуральные числа, не превосходящие n, чтобы в вершинах, соединённых ребром, всегда стояли разные числа. Докажите, что это можно сделать так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь, состоящий из рёбер, у которых числа в концах отличаются ровно на 1 или ровно на $n-1$.

8. Дана фиксированная раскраска графа в k цветов. Известно, что этот граф нельзя правильно раскрасить в $k-1$ цвет. Докажите, что в нём найдётся простой путь, содержащий ровно по одной вершине каждого из k цветов.