

## Теория цифр

1. Пусть  $t$  — натуральное число. Докажите, что существует число, начинающееся на 202020212022 и делящееся на  $t$ .
2. Может ли число, состоящее из 2000 восьмёрок и 2000 девяток делиться на число, состоящее из 2000 единиц и 2000 двоек?
3. Пусть  $t$  — нечётное натуральное число, не кратное 5. Докажите, что найдётся число, состоящее только из единиц и кратное  $t$ .
4. (а) Докажите, что для любого натурального  $k$  найдётся число, состоящее из нечётных цифр и кратное  $5^k$ .  
(б) Докажите, что для любого нечётного  $t$  найдётся число, состоящее из нечётных цифр и кратное  $t$ .
5. Для каких натуральных  $k$  верны следующие признаки?  
(а) Если сумма цифр числа делится на  $3^k$ , то и само число делится на  $3^k$ .  
(б) Если число делится на  $3^k$ , то его сумма цифр делится на  $3^k$ .
6. Дано натуральное  $m$ . Может ли натуральное число, делящееся на  $\underbrace{111\dots 11}_m$ , иметь сумму цифр меньше  $m$ ?
7. Можно ли найти такую степень тройки, что у неё подряд в каком-то месте идут 100500 нулей?
8. Докажите, что найдётся такое натуральное  $b$ , что для любого  $n > b$  число  $n!$  имеет сумму цифр больше  $10^6$ .
9. Обозначим за  $S(x)$  сумму цифр числа  $x$ . Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$ , что  
(а)  $S(3^n) \geq S(3^{n+1})$   
(б)  $S(2^n) \geq S(2^{n+1})$