

## Многочлены с целыми коэффициентами

1. Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами  
(а) принимает при пяти целых значениях  $x$  значение 7,  
(б) принимает при четырёх целых значениях  $x$  значение 7,  
то он не может принимать значение 14 ни при каком целом значении  $x$ .
2. Дан многочлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами. Оказалось, что  $P(a) = b$  и  $P(b) = a$  для некоторых двух различных целых  $a$  и  $b$ . Докажите, что у  $P(x) - x$  не более одного целого корня.
3. Многочлен с целыми коэффициентами  $f(x)$  таков, что  $f(10) = 10$ . Найдите наибольшее возможное количество целых решений уравнения  $f(x) = x^2$ .
4. Пусть  $P(x)$  — многочлен степени  $n > 10$  с целыми коэффициентами. Докажите, что у уравнения  $P(x)^2 = 1$  не более  $n$  целых решений.
5. Докажите, что для любого многочлена  $P(x)$  степени  $n$  с целыми коэффициентами найдётся такое целое число  $k$ , что число  $|P(k)|$  будет составным.
6. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 1 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?
7. Пусть несократимая дробь  $\frac{a}{b}$  — корень многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами. Докажите, что при любом целом  $k$  значение  $P(k)$  делится на  $bk - a$ .
8. У многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами значения в точках  $x = 1, 2, \dots, 2021$  — это числа  $1, 2, \dots, 2021$  в некотором порядке. Может ли степень  $P(x)$  быть равна 1000?