Алгебраический взгляд на числа Фибоначчи.

Если кто не помнит, *числами Фибоначчи* называют такую последовательность $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Докажите тождества:
(a) $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$;
(b) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$;
(c) $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;
(d) $F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \ldots nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$

2. **(a)** Найдите такие a и b, для которых $F_{n+4} = aF_{n+1} + bF_n$.
(b) Докажите, что $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} = F_{n+1}F_{m+1} - F_{n-1}F_{m-1}$.

3. Докажите, что $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

4. Докажите, что $F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

Остатки и делимость.

5. **(a)** Докажите, что для любого n найдётся число Фибоначчи, кратное n.
(b) Докажите, что существует число Фибоначчи, оканчивающееся на 9999.
(c) Дано простое число p. Докажите, что среди любых $p + 1$ последовательных чисел Фибоначчи найдётся кратное p.

6. Даны натуральные $a, b > 2$. Докажите, что
(a) если a делится на b, то F_a делится на F_b;
(b) если F_a делится на F_b, то a делится на b.

7. Докажите, что $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

Разное.

8. Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.