

Прямые углы и вписанные четырехугольники

Проекцией точки на прямую называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту прямую.

1. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке P . Докажите, что медиана PM треугольника ABP перпендикулярна CD .
2. Через точку A проведены три прямые, образующие друг с другом углы 60° . Докажите, что проекции любой точки B на эти прямые являются вершинами равностороннего треугольника.
3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Оказалось, что угол ABC равен 42° . Чему равен угол $A_1B_1C_1$?
4. (*Прямая Симсона*) На описанной окружности треугольника ABC отметили точку P . Докажите, что проекции точки P на стороны треугольника лежат на одной прямой.
5. Диагонали вписанного четырехугольника пересекаются в точке P . Докажите, что проекции точки P на его стороны являются вершинами описанного четырехугольника.
6. Из точки P внутри треугольника ABC опустили перпендикуляры PA_1 , PB_1 , PC_1 на стороны BC , CA , AB ; потом опустили перпендикуляры PA_2 , PB_2 , PC_2 на стороны треугольника $A_1B_1C_1$; и наконец опустили перпендикуляры PA_3 , PB_3 , PC_3 на стороны треугольника $A_2B_2C_2$. Докажите, что треугольники ABC и $A_3B_3C_3$ подобны.
7. Четырехугольник $ABCD$, не имеющий равных сторон, описан около окружности с центром I . Каждую из точек B и D спроецировали на каждую из прямых AI и CI . Докажите, что эти четыре проекции лежат на одной окружности.