Теорема Безу

В этом листке мы будем считать, что степень нулевого многочлена равна -1.

1. **(a)** Пусть $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены, и $Q(x) \neq 0$. Пусть n — степень многочлена $P(x)$. Докажите по индукции по n, что существуют такие многочлены $S(x)$ и $R(x)$, что степень $R(x)$ меньше степени $Q(x)$ и $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

(b) Докажите, что $R(x)$ и $S(x)$ единственные.

В этих обозначениях $R(x)$ называется *остатком* $P(x)$ *при делении на* $Q(x)$.

2. Поделите с остатком **(a)** $x^2 - x + 1$ на $x - 2$; **(b)** $x^6 + 1$ на $x^2 + x$; **(c)** $x^n - 2$ на $x - 1$

3. **Теорема Безу.** Дано число a. Докажите, что многочлен $P(x)$ даёт остаток $P(a)$ при делении на $x - a$.

4. Дано число a. Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда a является его корнем.

5. Про многочлен $P(x)$ известно, что $P(-1) = 2$, а $P(1) = 3$. Какой остаток может давать $P(x)$ при делении на $x^2 - 1$?

6. **(a)** Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — различные числа. Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на произведение $(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_k)$ тогда и только тогда, когда все a_i являются корнями $P(x)$.

(b) Докажите, что у многочлена степени $n \geqslant 0$ не более n различных корней.

7. Докажите, что $P(a) = Q(a)$ для любого действительного a, то многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают (то есть у них совпадают все соответствующие коэффициенты).

Кратностью корня a многочлена $P(x)$ называется наибольшее целое k такое, что $P(x)$ делится на $(x - a)^k$. Будем обозначать её через $\mathrm{mult}_P(a)$.

8. Докажите, что $\mathrm{mult}_{P \cdot Q}(a) = \mathrm{mult}_P(a) + \mathrm{mult}_Q(a)$.

9. Докажите, что у многочлена степени $n \geqslant 0$ не более n корней с учётом кратности.