

Игры.

Что-то про цену игры.

1. На блюде лежат 10 кусков сыра разного веса. Суммарная масса всех кусочков равно 200 граммов. Сначала Вася режет каждый из кусков на два. Затем Петя и Вася разбирают эти 20 кусков, беря по очереди по одному, начинает Петя. Каждый старается получить как можно больше сыра по весу. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?
2. Вася записал числа $1, 2, \dots, 100$ на пятидесяти карточках, на каждой стороне каждой карточки — по числу. Затем он выложил карточки на стол. Петя видит лишь верхние числа; он может выбрать любой набор карточек и перевернуть их. Он выиграет, если после этого сумма чисел на верхних сторонах карточек будет не меньше k . При каком наибольшем k Петя гарантированно может выиграть?
3. У Паши есть 1011 карточек с числами $2, 4, \dots, 2020$, а у Вовы есть 1010 карточек с числами $1, 3, 5, \dots, 2021$. Игроки по очереди делают ходы, начинает Паша. Игрок, который ходит, выкладывает карточку с каким-то числом, после чего его соперник выкладывает какую-то свою карточку. Тот, у кого число на карточке больше, получает одно очко, а карточки, которые были выложены, отправляются в сброс и больше в игре не участвуют. Игра заканчивается после 1010 ходов. Какое наибольшее количество очков может гарантировать Паша?

Без выдумок стратегий.

4. На доске написано число 12345. За ход разрешается вычесть из написанного числа любую его ненулевую цифру. Выигрывает тот, после чьего хода на доске будет написан ноль. Назовём число *выигрышным*, если начинающий с этого числа имеет выигрышную стратегию, и *проигрышным* иначе.
 - а) Предположим, что число 12344 выигрышное. Докажите, что тогда одно из чисел 12340, 12341, 12342, 12343 проигрышные.
 - б) Выигрышное или проигрышное число 12345?
5. На столе лежит кучка из N спичек. Двое по очереди берут из неё любое число спичек, являющееся полным квадратом. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что существует бесконечно много натуральных N , для которых у второго игрока есть выигрышная стратегия.
6. Паша и Вова играют в игру. Перед ними лежат две шоколадки: 100×100 и 100×500 . За один ход нужно выбрать одну из шоколадок, разломать её на две прямоугольные части с целыми сторонами и съесть один из **трёх** кусочков (в том числе можно съесть кусочек, который игрок сейчас не ломал). Ходят по очереди, начинает Паша, проигрывает тот, кто не может сходить. Кто из игроков побеждает при правильной игре?
7. На плоскости даны $2n$ точек. Человек Паук и Доктор Стрэйндж играют в игру. Два игрока по очереди выбирают по одной точке до тех пор, пока они не закончатся, первый ход делает Доктор Стрэйндж. Проигрывает тот, у кого сумма попарных расстояний между выбранными им точками меньше, чем у соперника.
 - а) Доктор Стрэйндж просчитывает разные варианты будущего и играет две партии одновременно. Он знает, как на каждый его ход ответит Человек Паук. Докажите, что он может действовать так, что во второй партии у него будут взяты ровно те точки, которые взяты у Человека Паука в первой.
 - б) Докажите, что Доктор Стрэйндж имеет выигрышную стратегию.