

## Неравенства о средних

1. (а) Докажите неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

для чисел  $n$ , являющихся степенями двойки и любых наборов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  положительных чисел.

- (б) Докажите это неравенство для любых  $n$  спуском от  $n$  к  $n - 1$ .

В следующих задачах можно пользоваться утверждением задачи 1 без доказательства.

2. Для положительных  $a, b, c$  докажите, что

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$$

3. Докажите, что для положительных  $x$  выполнено  $x^{40} + \frac{1}{x^{16}} + \frac{2}{x^4} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x} \geq 16$ .
4. Положительные числа  $x, y, z$  таковы, что  $xy^2z^3 = 108$ . Какое минимальное значение может принимать  $x + y + z$ ?
5. Для положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  докажите неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

6. Для положительных  $a, b, c$  докажите, что

$$\frac{9}{a + b + c} \leq 2 \left( \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{a + c} \right)$$

7. Для положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  обозначим  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Докажите, что

$$\frac{S}{S - a_1} + \frac{S}{S - a_2} + \dots + \frac{S}{S - a_n} \geq \frac{n^2}{n - 1}$$

8. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются *товарищами*, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

9. Для положительных чисел  $a, b, c$  верно  $abc = 1$ . Докажите, что

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \frac{a}{a^2b + 2} + \frac{b}{b^2c + 2} + \frac{c}{c^2a + 2}$$