

Целые и дробные части

Определение *Целая часть* числа x — наибольшее целое число не превосходящее x . Обозначается как $[x]$. *Дробная часть* числа x — $\{x\}$ определяется как разность самого числа и его целой части. $x - [x] = \{x\}$

1. У Пети есть калькулятор, на котором есть кнопка F . При нажатии на кнопку F , к числу прибавляется его дробная часть (например, из числа 2,36 получается число 2,72). Начав с положительного числа, меньшего 1, Петя за десять нажатий кнопки F получил число 10. С какого положительного числа он мог начать?
2. Найдите все натуральные n , для которых число $[\frac{n^2}{5}]$ — простое.
3. Числа x, y, z, t таковы, что $\{x + y + z\} = \{x + y + t\} = \{x + z + t\} = \{y + z + t\} = \frac{1}{4}$. Найдите $\{x + y + z + t\}$.
4. Существуют ли нецелые числа x и y , для которых $\{x\} \cdot \{y\} = \{x + y\}$?
5. Решите уравнение $\sqrt{1 + \{2x\}} = [x^2] + 2[x] + 3$
6. Для чисел $x > 1, y > 1$ известно, что $\{x\} = \{y\}$ и $\{\frac{1}{x}\} = \{\frac{1}{y}\}$. Верно ли, что $x = y$?
7. Докажите, что существует бесконечно много нецелых положительных чисел x таких, что число $x(x - 3\{x\})$ - целое.
8. Решите уравнение $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$
9. Решите уравнение $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$.