

## Эйлеровы графы и лемма о хоровах.

**Определение.** Цикл, проходящий по каждому ребру графа ровно один раз называется *эйлеровым*.

**Критерий эйлеровости.** В графе существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и степень каждой вершины чётная.

- (а) (**Лемма о хоровах**) Степень каждой вершины графа равна 2. Докажите, что граф представляет из себя объединение непересекающихся циклов.

(б) В связном графе все рёбра покрасили в цвета. Оказалось, что рёбра каждого цвета образуют цикл. Докажите, что в графе есть цикл, проходящий по всем рёбрам ровно один раз. *Такие циклы называются эйлеровыми.*

(с) В связном графе степень каждой вершины чётная. Докажите, что в нём существует эйлеров цикл.
- В ориентированном графе из любой вершины можно добраться до любой другой (такие графы называются *сильно связными*). Кроме того, исходящая степень любой вершины равна её входящей степени. Докажите, что существует цикл, проходящий по всем рёбрам ровно один раз.
- (а) Степени всех вершин графа чётные. Докажите, что его рёбра можно ориентировать так, чтобы входящие и исходящие степени вершин были равны.

(б) Докажите, что рёбра произвольного графа можно ориентировать так, чтобы для каждой вершины количество входящих и исходящих рёбер отличалось не более, чем на 1.
- Рёбра связного графа покрашены в два цвета. Оказалось, что из каждой вершины выходит поровну рёбер каждого из цветов. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует путь (не обязательно простой), цвета рёбер которого чередуются.
- В волейбольном турнире принимают участие  $2n$  команд. Команды сыграли два тура, в каждом из которых каждая команда проводила ровно один матч. Докажите, что можно выделить  $n$  команд, ещё не игравших друг с другом.
- (а) В волейбольной Лиге Чемпионов участвуют  $2n$  команд из  $n$  стран, по 2 из каждой. Команды пронумеровали числами от 1 до  $2n$  и каждая команда сыграла с двумя соседними (1 и  $2n$  считаем соседними). Докажите, что можно разбить все команды на два дивизиона так, чтобы команды из одной страны были в разных дивизионах и каждая команда сыграла не более одной игры в своём дивизионе.

(б) Лигу чемпионов реформировали и теперь из каждой страны участвует по 4 команды. Команды сыграли два тура, в каждом из которых каждая команда проводила ровно один матч. Докажите, что после двух туров можно разбить все команды на четыре дивизиона так, чтобы никакая команда не была в одном дивизионе с той, с которой уже играла или с командой из своей страны.

*Некоторые из вас может быть помнят прошлогодний лист про гамильтоновы пути и циклы. Так вот критерий эйлеровости удобнее тем, что он в обе стороны. Теоремы о существовании гамильтоновых циклов же наоборот были избыточными. Надеюсь, это относительное удобство вы ощутите, решив следующую, довольно трудную задачу.*

- Можно ли выписать по кругу 64 цифры, каждая из которых 0 или 1 так, чтобы все куски из шести последовательных цифр были разными?