

## Отрезки касательных

1. Пусть  $M$  — середина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ .
  - (a) Докажите, что  $M$  равноудалена от точек касания вписанной и невписанной окружностей с отрезком  $BC$ .
  - (b) Докажите, что  $M$  равноудалена от точек касания невписанных окружностей с продолжениями стороны  $BC$ .
2. Четырёхугольник  $ABCD$  описан около окружности. Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  — в точке  $Q$ . Докажите, что
  - (a)  $AB + CD = AD + BC$ ;
  - (b)  $PC + AQ = QC + AP$ ;
  - (c)  $PD + DQ = PB + BQ$ .
3. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  — в точке  $Q$ . Оказалось, что существует окружность, касающаяся отрезков  $CP$ ,  $CQ$  и продолжений отрезков  $AP$ ,  $AQ$  за точки  $P$ ,  $Q$  соответственно. Докажите, что
  - (a)  $AB + BC = AD + DC$ ;
  - (b)  $AP + PC = AQ + QC$ ;
  - (c)  $BP + PD = BQ + QD$ .
4. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Пусть  $\omega_D$  и  $\omega_B$  — окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ADC$ .
  - (a) Докажите, что если  $\omega_D$  и  $\omega_B$  касаются, то в  $ABCD$  можно вписать окружность.
  - (b) Докажите, что если  $ABCD$  — описанный четырёхугольник, то  $\omega_D$  и  $\omega_B$  касаются.