

Разнойбой

1. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка K такая, что $AK = BD$. Точка M — середина CK . Докажите, что $\angle BMD = 90^\circ$.
2. На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убрали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.
3. Даны четыре натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных трёх. Наименьшее общее кратное каждых трёх из данных чисел делится на оставшееся четвёртое. Докажите, что произведение данных чисел — точный квадрат.
4. В таблице 10×10 записано 100 различных чисел. За ход можно выбрать любой составленный из клеток прямоугольник и переставить все числа в нем симметрично относительно его центра («повернуть прямоугольник на 180° »). Всегда ли за 99 ходов можно добиться, чтобы числа возрастали в каждой строке слева направо и в каждом столбце — снизу вверх?
5. Пусть p — простое число, большее 10^k . Взяли число, делящееся на p , и вставили между какими-то двумя его соседними цифрами k -значное число A . Получили число, делящееся на p . В него вставили k -значное число B — между двумя соседними цифрами числа A , — и результат снова оказался делящимся на p . Докажите, что число B получается из числа A перестановкой цифр