Принцип крайнего в тч

1. На доску выписаны 2011 чисел. Оказалось, что сумма любых трех выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?

2. Пусть k — натуральное число, и $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_m = 4k$ — все положительные делители числа $4k$. Докажите, что найдется $i \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что $d_i - d_{i-1} = 2$.

3. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается 1 раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)

4. Дано $2n-1$ попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$. Докажите, что среди них обязательно есть простое число.

5. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвертая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

6. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

7. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

8. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ не является целым число:
(a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ **(b)** $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}$