Неравенства о средних. Пока для двух переменных

Даны неотрицательные числа a и b. Рассмотрим следующие величины: $H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ — среднее гармоническое, $G = \sqrt{ab}$ — среднее геометрическое, $A = \frac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое, $K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ — среднее квадратичное.

1. Докажите цепочку неравенств

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

2. Для действительных чисел a, b, c докажите, что

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$$

3. Докажите, что для любого положительного t верно

$$2^t + 2^{t^3} \geqslant 2 \cdot 2^{t^2}$$

4. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geqslant a+b+c$$

5. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{ab+bc+ac}{2} \geqslant \frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}$$

6. Докажите, что для любых положительных a, b, c, d выполнено неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}$$

7. Положительные числа a, b, c дают в сумме 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}$$