Перестановки и чётность

Определения. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$ в каком-то порядке. *Инверсией* называется пара чисел x_i, x_j такая, что $i < j$, но $x_i > x_j$. Перестановка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *чётной*, если в ней чётное число инверсий, и *нечётной* в противном случае.

1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$ в каком-то порядке. Иван Ильич написал на доске строчку $1, 2, \ldots, n$, а под ней записал строчку $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Затем он соединил отрезками одинаковые числа, так, чтобы никакие 3 отрезка не пересекались в одной точке. Докажите, что количество точек пересечания отрезков имеет ту же чётность, что и перестановка $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Определение. Перестановка, меняющая два числа местами, а остальные оставляющая на месте, называется *транспозицией.*

2. Докажите, что любая транспозиция — нечётная.

3. У Марии Юрьевны есть любимая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Она выложила в ряд карточки с числами $a_1, \ldots, a_n$ (именно в таком порядке) и переставила их своим любимым способом. У неё получился ряд из карточек с числами $b_1, \ldots, b_n$.
Докажите, что если любимая перестановка Марии Юрьевны — чётная, то

$$\frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_{n-1} - a_n)}{(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)\ldots(b_{n-1} - b_n)} = 1,$$

а если нечётная, то

$$\frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_{n-1} - a_n)}{(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)\ldots(b_{n-1} - b_n)} = -1.$$

4. Докажите, что если применить последовательно перестановки одной чётности, то в результате получится чётная перестановка, а если применить последовательно перестановки разной чётности, то в результате получится нечётная перестановка.

5. **(a)** Докажите, что любую перестановку можно получить, последовательно применив несколько транспозиций.
(b) Докажите, что после применения нечётного числа транспозиций получается нечётная перестановка, а после применения чётного — чётная.

Определение. Перестановка называется *чётной*, если её можно получить как результат применения чётного числа транспозиций, и *нечётной* — если нечётного.

6. Каких перестановок чисел от 1 до n больше — чётных или нечётных?

7. **(a)** Числа от 1 до m переставили по циклу. При каких m получилась чётная перестановка, а при каких — нечётная?
(b) Перестановка чисел от 1 до n разбилась на k циклов. При каких n и k она чётная, а при каких — нечётная?

8. Перед роботом выложены карточки с числами от 1 до n. За одну операцию робот может выбрать любые 3 карточки и переложить их по циклу. Сколько всего перестановок он может получить?

9. В квадрате 4×4 расположены 15 фишек размера 1×1, пронумерованных числами от 1 до 15. За один ход можно передвигать на пустую клетку соседнюю с ней по стороне фишку. Можно ли получить из левой конфигурации правую?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

10. После усердных тренировок Вася в совершенстве овладел навыком сборки кубика Рубика. Он уверяет, что может даже собрать кубик Рубика, у которого перевернули ровно один из боковых кубиков (то есть тот, что с двумя цветными гранями). Можно ли верить этому Васе?