

Вписанные углы

Определения. На окружности ω с центром O отмечены точки A, B . Мерой дуги AB назовём величину *центрального* угла AOB (центральный угол может быть больше 180° ; вся дуга должна быть внутри центрального угла). Для произвольной точки C на окружности вне дуги AB угол ACB называется *вписанным* углом, опирающимся на AB .

Теорема. Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.

В этом листке под «меньшей» дугой AB понимается та из двух дуг AB , которая не содержит других отмеченных точек, вторая дуга AB называется «большей».

1. Пусть M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что
 - (a) AM — биссектриса угла BAC ;
 - (b) AN — биссектриса внешнего угла BAC .
2.
 - (a) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S . Докажите, что угол ASB равен полусумме «меньших» дуг AB и CD .
 - (b) В этой же картинке лучи AB и DC пересекаются в точке P . Докажите, что угол APD равен полуразности «меньших» дуг AD и BC .
3. На окружности в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D . Пусть K, L, M, N — середины «меньших» дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.
4. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон. Его вершины разбивают окружность на четыре дуги. Рассматриваются восемь прямых: две прямые, соединяющие середины противоположных дуг; две биссектрисы угла между прямыми AC и BD ; две биссектрисы угла между прямыми AB и CD ; две биссектрисы угла между прямыми AD и BC . Докажите, что эти восемь прямых можно раскрасить в красный и в синий цвета так, чтобы одноцветные прямые были параллельны.
5. На окружности отмечено 100 точек. Может ли при этом оказаться ровно 1000 прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки?
6. Существует ли вписанный в окружность N -угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов, если
 - (a) $N = 19$;
 - (b) $N = 20$?
7. На прямой отметили точки X_1, \dots, X_{10} (именно в таком порядке) и построили на отрезках $X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_9X_{10}$ как на основаниях равнобедренные треугольники с углом α при вершинах. Оказалось, что все эти вершины лежат на полуокружности с диаметром X_1X_{10} . Найдите α .