Повторение

Хорошо забытое старое

1. В компании, состоящей из конечного числа мальчиков и девочек, *общительной группой мальчиков* называется такая группа мальчиков, что каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы; *общительной группой девочек* называется такая группа девочек, что каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Докажите, что количество общительных групп мальчиков и количество общительных групп девочек имеют одинаковую четность. (Знакомство считается взаимным.)
Подсказка. Для множества девочек A определим S_A — количество множеств мальчиков, не знакомых ни с кем из A. Аналогично для множества мальчиков B определим количество множеств девочек T_B, не знакомых ни с кем из B. С помощью формулы включений и исключений через S_A и T_B можно выразить количество общительных групп. Теперь остаётся задуматься о чётности.

2. Дано натуральное число a.
(a) Докажите, что у уравнения $\varphi(x) = a$ конечное число решений.
(b) Всегда ли у уравнения $\varphi(x) = a$ есть хотя бы одно решение?

3. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Докажите, что каждое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

4. Докажите, что при любом натуральном n число
(a) $2^n - 1$ не делится на n.
(b) $3^n - 2^n$ не делится на n.

5. Дано натуральное число n.
(a) Докажите, что каждый простой делитель числа $2^{2^n} + 1$ имеет вид $2^{n+1}k + 1$ для некоторого k.
(b) Докажите, что простых чисел вида $2^{n+1}k + 1$ бесконечно много.

Новое

6. Кафтан площадью 1 покрыт пятью заплатами площадью $\frac{1}{2}$ каждая.
(a) Докажите, что найдутся две заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше, чем $\frac{3}{20}$
(b) Докажите, что найдутся две заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше, чем $\frac{1}{5}$
(c) Докажите, что найдутся три заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше, чем $\frac{1}{20}$

7. Доказать, что количество способов разложить n различных шаров по k различным коробкам так, чтобы ни одна коробка не осталась пустой, равно $\sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \cdot C_k^j \cdot j^n$.

8. Пусть НОД$(a, b) > 1$. Что больше: $\varphi(ab)$ или $\varphi(a)\varphi(b)$?

9. Известно, что $2^n + 1$ делится на n^2
(a) Докажите, что n делится на 3;
(b) Докажите, что n не делится на 9;
(c) Найдите все такие n

10. **(a)** Для всех натуральных n докажите неравенство

$$\frac{\varphi(1)}{2^1 - 1} + \frac{\varphi(2)}{2^2 - 1} + \ldots + \frac{\varphi(n)}{2^n - 1} < \frac{2^{n!+1}}{2^{n!} - 1}.$$

(b) Для всех натуральных n докажите неравенство

$$\frac{\varphi(1)}{2^1 - 1} + \frac{\varphi(2)}{2^2 - 1} + \ldots + \frac{\varphi(n)}{2^n - 1} < 2.$$