Множества

1. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовал хотя бы один школьник этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в 5% всех экскурсий.

2. На конгресс приехало 100 учёных, каждый знает три языка. Оказалось, что любые четверо из них могут общаться на одном языке. Докажите, что и любые пятеро из них могут общаться на одном языке.

3. В музее современного искусства размещён 2021 шедевр абстрактной живописи. Изучив эти шедевры, искусствовед Иванов установил, что для рисования всех этих картин вместе использовано k цветов и наборы цветов у любых двух картин различны. Оказалось, что нет цвета, присутствующего на всех картинах, но для любых двух картин найдется общий цвет. При каком наименьшем k такое возможно?

4. В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад.

5. Дано множество $\{1, \ldots, n\}$ и несколько его различных подмножеств. Известно, что среди любых трех из них можно выбрать два так, чтобы одно содержалось в другом. Докажите, что все подмножества можно разбить на две группы так, чтобы для любых двух подмножеств из одной группы одно содержалось в другом.

6. Дано натуральное число N. Двое по очереди называют непустые подмножества множества $\{1, \ldots, N\}$, причем запрещается называть такие, которые содержат хотя бы одно уже названное подмножество. Проигрывает тот игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?