Повторение.

Старое

1. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC взяты точки X и Y соответственно. На отрезках CX и AY как на диаметрах посторены окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что общая хорда ω_1 и ω_2 проходит через ортоцентр треугольника ABC.

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC — в точке Q. Докажите, что:

(a) *(Прямая Гаусса)* середины отрезков AC, BD и PQ лежат на одной прямой.

(b) *(Прямая Обера)* ортоцентры треугольников APD, ABQ, BPC, CQD лежат на одной прямой.

(c) Прямые Гаусса и Обера перпендикулярны.

3. **(a)** Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H. Прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке C'. Определим точки A' и B' аналогично. Докажите, что A', B', C' лежат на одной прямой, перпендикулярной OH.

(b) Докажите, что основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой, перпендикулярной линии центров вписанной и описанной окружностей.

4. Даны четыре окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Рассмотрим геометрическое место точек, сумма степеней которых относительно ω_1 и ω_2 равна сумме степеней относительно ω_3 и ω_4. Докажите, что это либо вся плоскость, либо прямая, либо пустое множество.

5. Существует ли квадратный трёхчлен, все значения которого в натуральных точках — степени двойки?

6. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшиеся обойти конем (побывав на каждой по одному разу)?

7. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали квадрат (со сторонами, параллельными линиям клеток).

Новое

8. Окружности ω_1 и ω_2 построены на медианах AM и BN треугольника ABC как на диаметрах. Докажите, что C лежит на прямой, соединяющей точки пересечения ω_1 и ω_2.

9. Дан шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что геометрическое место точек P таких, что $PA^2 + PC^2 + PE^2 = PB^2 + PD^2 + PF^2$ — это либо вся плоскость, либо прямая, либо пустое множество.

10. Существует ли квадратный трехчлен, все значения которого в натуральных точках — кубы натуральных чисел?

11. Дана выпуклая центрально-симметричная фигура площади больше 4 с центром в целой точке. Докажите, что она содержит целую точку, отличную от центра