# Повторение.

## Хорошо забытое старое

**1.** В вершинах связного графа можно так расставить натуральные числа, не превосходящие $n$, чтобы в вершинах, соединённых ребром, всегда стояли разные числа.
**(a)** Докажите, что это можно сделать так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь, состоящий из рёбер, у которых числа в концах отличаются ровно на 1 или на $n-1$.
**(b)** Докажите, что это можно сделать так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь, состоящий из рёбер, у которых числа в концах отличаются ровно на 1.

**2.** Дана фиксированная раскраска графа в $k$ цветов. Известно, что этот граф нельзя правильно раскрасить в $k-1$ цвет. Докажите, что в нём найдётся простой путь, содержащий ровно по одной вершине каждого из $k$ цветов.

**3.** Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени $n$ с целыми коэффициентами найдётся такое целое число $k$, что
**(a)** число $|P(k)|$ будет составным.
**(b)** числа $|P(k)|, |P(k+1)|, \ldots, |P(k+2021)|$ будут составными.

**4.** Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(2^n)$ делится на $n$ для любого натурального $n$?

## И новое тоже

**5.** Рёбра графа раскрашены в $d > 1$ цветов так, что в любом пути из трёх различных рёбер (в том числе и в замкнутом) первое и последнее ребро покрашены в разные цвета. Докажите, что вершины этого графа можно правильным образом раскрасить в $d$ цветов.

**6.** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что существует бесконечно много таких простых чисел $q$, что $P(n)$ делится на $q$ для какого-то натурального $n$.

**7.** У многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами значения в точках $x = 1, 2, \ldots, 2021$ — это числа $1, 2, \ldots, 2021$ в некотором порядке.
**(a)** Чему может быть равно $P(1)$?
**(b)** Чему может быть равна степень $P(x)$?

**8.** Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами назовём *уважительным*, если для любых взаимно простых $m$ и $n$ значения $P(m)$ и $P(n)$ также взаимно просты. Найдите все уважительные многочлены.