Квадратичные иррациональности. Сопряжение.

1. Придумайте многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число:
(a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;
(b) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

2. Число $a+b\sqrt{2}$ является корнем многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что $a-b\sqrt{2}$ тоже является корнем $P(x)$.

Определение. Скажем, что число $\overline{x}$ является *сопряжённым* к числу $x = a + b\sqrt{d}$, где a, b целые, а d не полный квадрат, если они вместе являются корнями квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами.

3. Докажите, что у каждого числа вида $a + b\sqrt{d}$ сопряжённое ровно одно.

4. Натуральные числа a, b таковы, что $(2+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$. Докажите, что $a^2 - 3b^2 = 1$.

5. Докажите, что число $5+2\sqrt{7}$ не может быть представлено в виде суммы чисел вида $(a+b\sqrt{7})^2$, где a, b — рациональные.

6. Найдите сотую цифру после запятой числа $(2+\sqrt{5})^{2021}$.

7. Докажите, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

8. Не равные одновременно нулю целые числа a, b и c по модулю меньше, чем 10^6. Докажите неравенство $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| > 10^{-21}$.

9. Обозначим A_n количество двадцатизначных точных квадратов, начинающихся с десятичной записи числа n. Докажите, что $A_{2021} > A_{2022} + 10$.