Степень точки и радикальные оси

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC нашлись такие точки P и Q соответственно, что $AP = 21$, $PB = 12$ и $BQ = 9$. Прямая PQ пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Оказалось, что $PX = QY$. Найдите длину отрезка QC.

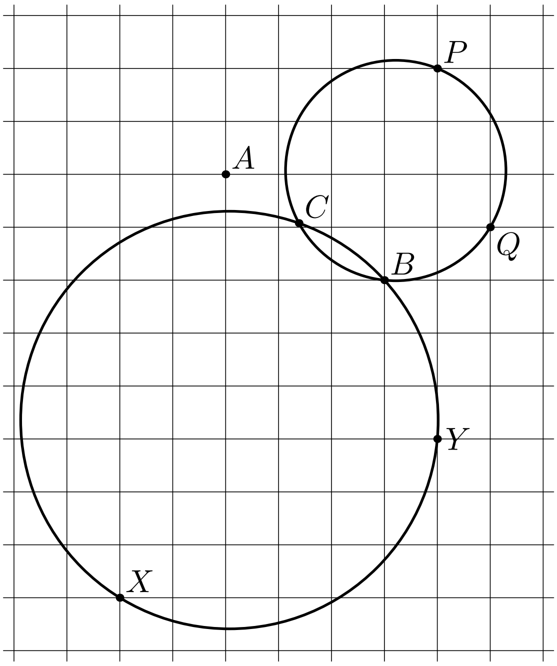
2. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На отрезках AB и BC выбраны точки P и Q соответственно так, что $OP = OQ$. Точка M такова, что $PBQM$ — параллелограмм. Докажите, что $\angle BAM = \angle BCM$.

3. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, R — ее радиус.

(a) I — центр вписанной окружности, r — ее радиус. Докажите, что $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

(b) I_B — центр вневписанной окружности, r_B — ее радиус. Выразите OI_B через R и r_B.

4. На картинке ниже точки A, B, P, Q, X, Y — узлы сетки, C — вторая точка пересечения окружностей (BPQ) и (BXY). Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой.



5. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC. Пусть S — точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что длины касательных из S к вневписанным окружностям треугольника ABC равны.

6. Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M. Докажите, что периметр одного из треугольников ABM или ACM равен 2.

7. Даны четыре окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Рассмотрим геометрическое место точек, сумма степеней которых относительно ω_1 и ω_2 равна сумме степеней относительно ω_3 и ω_4. Докажите, что это либо вся плоскость, либо прямая, либо пустое множество.