Радикальные оси

Напоминание. Степенью точки P относительно окружности ω называется величина $\pm PA \cdot PC$, где A и C — точки пересечения произвольной секущей через точку P с окружностью ω. Если точка P лежит вне окружности, то произведение берётся со знаком «+», а если внутри — то со знаком «−».

1. Дана окружность с центром O и радиусом r. Докажите, что степень точки A относительно этой окружности равна $OA^2 - r^2$.

2. Даны две окружности с различными центрами. Докажите, что геометрическое место точек, степени которых относительно этих окружностей равны — прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей. (Она называется *радикальной осью* окружностей.)

3. К окружностям ω_1 и ω_2 проведены общие внешние касательные A_1A_2 и B_1B_2, а также общие внутренние касательные C_1C_2 и D_1D_2 (точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на ω_1, а точки A_2, B_2, C_2, D_2 — на ω_2). Докажите, что середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 лежат на одной прямой.

4. Даны три окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и A_2; окружности ω_2 и ω_3 пересекаются в точках B_1 и B_2; окружности ω_3 и ω_1 пересекаются в точках C_1 и C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

5. Одна окружность проходит через вершины A и C прямоугольника $ABCD$, а другая — через вершины B и D. Докажите, что их общая хорда проходит через центр прямоугольника.

6. Дан треугольник ABC. На отрезке AB отмечены точки C_1 и C_2, на отрезке AC — точки B_1 и B_2, на отрезке BC — точки A_1 и A_2. Известно, что четырехугольники $A_1A_2B_1B_2$, $B_1B_2C_1C_2$ и $C_1C_2A_1A_2$ вписанные. Докажите, что шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ вписанный.

7. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC взяты точки X и Y соответственно. На отрезках CX и AY как на диаметрах посторены окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что общая хорда ω_1 и ω_2 проходит через ортоцентр треугольника ABC.

8. Дана точка P вне окружности ω. Точки M и N — середины касательных PA и PB к ω (точки A и B лежат на ω). На прямой MN выбрана точка X. Докажите, что длина касательной из X к ω равна длине отрезка PX.

9. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC — в точке Q. Докажите, что:

(a) *(Прямая Гаусса)* середины отрезков AC, BD и PQ лежат на одной прямой.

(b) *(Прямая Обера)* ортоцентры треугольников APD, ABQ, BPC, CQD лежат на одной прямой.

(c) Прямые Гаусса и Обера перпендикулярны.

10. **(a)** Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H. Прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке C'. Определим точки A' и B' аналогично. Докажите, что A', B', C' лежат на одной прямой, перпендикулярной OH.

(b) Докажите, что основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой, перепендикулярной линии центров вписанной и описанной окружностей.