Теорема Пифагора и теорема Карно

1. **(a)** Даны точки A, B и вещественное число c. Докажите, что на прямой AB есть ровно одна точка P такая, что $AP^2 - BP^2 = c$.

(b) В треугольнике ABC проведена высота BH. Докажите, что $AB^2 - BC^2 = AH^2 - HC^2$.

(c) Даны точки A, B на плоскости и вещественное число c. Докажите, что геометрическое место точек P таких, что $AP^2 - BP^2 = c$ — прямая, перпендикулярная AB.

(d) Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.

2. В шестиугольнике $ABCDEF$: углы A и C — прямые, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Докажите, что прямые DF и BE перпендикулярны.

3. Диагонали описанного четырехугольника перпендикулярны. Обязательно ли у него есть две пары равных сторон?

4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка X. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Перпендикуляр, опущенный из M на AX, пересекается с перпендикуляром, опущенным из N на CX, в точке P. Докажите, что точка P равноудалена от точек A и C.

5. **(a)** **Теорема Карно.** Дан треугольник ABC. На сторонах BC, AC, AB взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что перпендикуляры к сторонам, восстановленные в A_1, B_1, C_1, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + CB_1^2 + BA_1^2$.

(b) То же, что в пункте **(a)**, но теперь A_1, B_1, C_1 — произвольные точки плоскости.

6. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей треугольника на соответствующие стороны, пересекаются в одной точке.

7. A', B', C' — основания перпендикуляров из вершин A, B, C треугольника ABC на прямую ℓ. Докажите, что перпендикуляры из A', B', C' на BC, AC, AB пересекаются в одной точке.

8. Докажите, что перпендикуляры к сторонам, восставленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда треугольник – равнобедренный.

9. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Лучи AB и DC пересекаются в точке X, лучи CD и FE — в точке Y, лучи EF и BA — в точке Z. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров описанных окружностей треугольников BCX, DEY, FAZ на прямые EF, AB, CD соответственно, пересекаются в одной точке.