Функция Эйлера

Будем обозначать через $\varphi(n)$ количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Функция φ называется функцией Эйлера.

1. **(a)** Докажите, что если числа a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
Указание: вспомните Китайскую теорему об остатках.
(b) Докажите, что $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ для любого простого числа p и натурального k.
(c) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — разложение числа n на простые множители. Докажите, что

$$\varphi(n) = (p_1 - 1) \ldots (p_k - 1) \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} \ldots p_k^{\alpha_k - 1}.$$

2. Найдите все натуральные n такие, что $\varphi(n) = \frac{n}{3}$.

3. Дано натуральное число a.
(a) Докажите, что у уравнения $\varphi(x) = a$ конечное число решений.
(b) Всегда ли у уравнения $\varphi(x) = a$ есть хотя бы одно решение?

4. Пусть $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ — все делители числа n. Докажите, что

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_k) = n.$$

Указание: может быть, вам поможет посмотреть на $\varphi(d_i)$ как на количество каких-то чисел от 1 до n. А может быть, вам поможет задача 1a.

5. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такие, что $a_0 = 1$, $a_1 > 1$ и $a_n = \varphi(a_{n+1})$ при всех $n > 0$. (Через $\varphi(k)$, как обычно, обозначено количество натуральных чисел, не превосходящих k и взаимно простых с k.)

6. Между двумя единицами пишется двойка, затем между любыми двумя соседними числами пишется их сумма и т.д. Докажите, что число n в итоге будет выписано ровно $\varphi(n)$ раз.

7. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Докажите, что каждое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.