Побитовая сумма.

Скажем, что *побитовая сумма* набора чисел равна нулю, если в любом разряде в двоичной записи чётное число единиц.

Побитовая сумма набора равна a, если при добавлении a к этому набору получится набор с нулевой побитовой суммой. Обозначение $x \oplus y$.

Побитовая сумма строк s_1, s_2, $\dots s_k$ длины n из нулей и единиц — это строка из нулей и единиц, в i-том разряде которой стоит сумма i-тых разрядов s_1, $\dots s_k$ по модулю 2.

1. **(a)** Для каких натуральных x верно равенство $x + 1 = x \oplus 1$?
(b) Сколько существует пар чисел (a, b), меньших 1024, таких, что $a \oplus b = a + b$?
(c) Сколько существует чисел n, меньших 1000, таких, что $n \oplus 2n = 3n$?

2. Назовём набор последовательностей из 0 и 1 длины n *хорошим*, если любые две последовательности отличаются хотя бы в k разрядах. Докажите, что если есть хороший набор из 3 последовательностей, то к нему всегда можно добавить ещё одну. (*Постарайтесь избежать какого бы то ни было разбора случаев, примените новое.*)

3. **(a)** Даны несколько натуральных чисел, побитовая сумма двоичных записей которых равна двоичной записи некоторого ненулевого числа. Докажите, что одно из чисел можно уменьшить так, чтобы побитовая сумма стала равна 0.
(b) На столе лежат n куч, в которых $a_1, a_2 \dots a_n$ камней. Двое по очереди берут любое количество камней из любой кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что у второго есть выигрышная стратегия тогда и только тогда, когда побитовая сумма чисел $a_1, a_2 \dots a_n$ равна нулю.

4. **(a)** Фокусник и ассистент показывают фокус. Ассистент даёт в распоряжение зрителя шахматную доску. Зритель может перекрасить некоторые клетки и называет ассистенту одну из клеток. После чего ассистент перекрашивает ещё одну клетку. Затем входит фокусник. Он видит только текущее состояние доски. И должен назвать клетку, которую загадал зритель. Придумайте алгоритм, позволяющий ассистенту и фокуснику осуществить задуманное.
Эта задача у вас уже в каком-то виде была, но решите её, используя новую идею.
(b) *(Вопрос немного в сторону.)* А при каком количестве клеток на доске такой фокус в принципе может получиться?

5. Антон выписал семь подмножеств десятиэлементного множества M_1, M_2, $\dots M_7$. После этого Марина для каждого из 1024 подмножеств выписывает строчку по следующему правилу: подмножеству A сопоставляется строка $(a_1, a_2, \dots a_7)$, где a_i — остаток при делении $|A \cap M_i|$ при делении на 2.
(a) Обязательно ли любая строка длины 7 сопоставлена какому-то множеству?
(b) Предположим подмножеству A сопоставлена строка s_1, а подмножеству B — s_2. Докажите, что какому-то подмножеству сопоставлена строка $s_1 \oplus s_2$.
(c) Докажите, что есть непустое множество, которому сопоставлена строчка из нулей.

6. Есть n не горящих лампочек и k выключателей. Каждый выключатель соединён с некоторыми лампочками. При нажатии выключателя, все соединённые с ним лампочки меняют своё состояние (если горели, то гаснут, если не горели, то загораются). Изначально все лампочки выключены. Назовём конфигурацию лампочек *достижимой*, если её можно получить, нажимая на выключатели.
(a) Докажите, что можно отключить несколько выключателей (возможно ни одного) так, чтобы множество достижимых конфигуаций не изменилось, но любая конфигурация получалась бы ровно один раз.
(b) Докажите, что количество достижимых конфигураций является степенью двойки.

7. Есть белая клетчатая доска. Выделено несколько множеств клеток. За один ход можно менять цвета всех клеток какого-то множества. Оказалось, что не все раскраски можно получить. Докажите, что можно выделить множество клеток, чётность количества чёрных клеток в котором — инвариант.