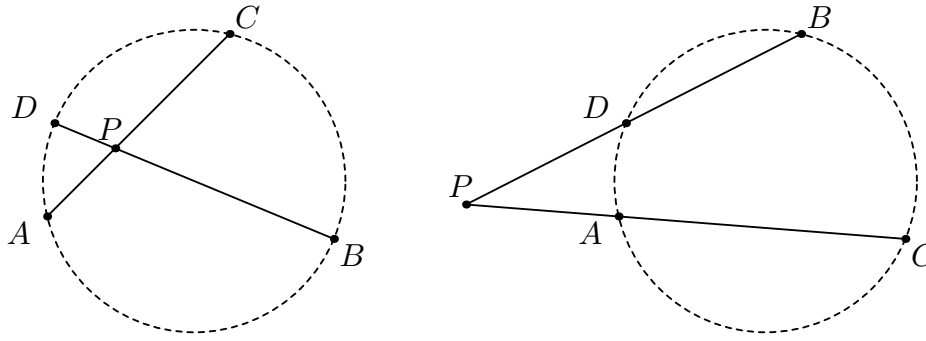


Степень точки



1. Для обеих картинок сверху докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.

Определение. Степенью точки P относительно окружности ω называется величина $\pm PA \cdot PC$, где A и C — точки пересечения произвольной секущей через точку P с окружностью ω . Если точка P лежит вне окружности, то произведение берётся со знаком «+», а если внутри — то со знаком «-».

2. Докажите, что для точки вне окружности её степень равна квадрату длины отрезка касательной к этой окружности.
3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . На продолжении отрезка AB взята точка P . Докажите, что длины касательных из P к ω_1 и ω_2 равны.
4. Пусть AB и CD — общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 (точки A и C лежат на ω_1 , точки B и D лежат на ω_2). Точка M — середина AB . Отрезок MC пересекает ω_1 в точке P , отрезок MD пересекает ω_2 в точке Q . Докажите, что точки C, D, P, Q лежат на одной окружности.
5. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке P , причём $\angle APB < 90^\circ$. Докажите, что длины отрезков касательных, проведённых из точки P к окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.
6. На плоскости даны окружность ω , точка A , лежащая внутри ω , и точка B , лежащая вне ω . Рассматриваются всевозможные треугольники BXY , такие что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A . Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY , лежат на одной прямой.
7. Дан остроугольный треугольник ABC . Окружность с диаметром AB пересекает высоту из вершины C в точках P и Q . Окружность с диаметром AC пересекает высоту из вершины B в точках X и Y . Докажите, что точки P, Q, X, Y лежат на одной окружности.
8. Через центр I вписанной в неравносторонний треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке K . Из точки I на прямую AK опущен перпендикуляр ID . Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.
9. Окружности Ω и ω касаются внутренним образом в точке A . Хорда BC окружности Ω касается окружности ω в точке K . Докажите, что середина отрезка AK , центр окружности ω и точки B, C лежат на одной окружности.