Иррациональность.

1. Докажите, что числа **(a)** $\sqrt{2}$; **(b)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; **(c)** $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ иррациональные.

2. Сумма и произведение двух чисел рациональны. Обязательно ли сами числа рациональны?

3. Существуют ли такие иррациональные положительные a и b, что a^b — рациональное число.
Здесь у вас может возникнуть недоумение, что значит возвести число в иррациональную степень? У нас есть желание, чтобы вы понимали, что это не очень простой вопрос и тщательные определения требуют большой подготовительной работы.
Тем не менее несколькими утверждениями воспользоваться разрешаем:
1) Для любых положиительных a и b существует такое действительное x, что $a^x = b$.
2) Для положительного a и любых x и y выполнено $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ и $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$.

4. Существуют ли такие вещественные a, b такие, что число $a+b$ иррационально, однако при любом натуральном n число $a^{2n+1}+b^{2n+1}$ рационально?

5. Натуральные числа a и b таковы, что $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. Докажите, что $\frac{a}{b} > \sqrt{2}+\frac{1}{4b^2}$.

6. **(Теорема Дирихле) (a)** Дано иррациональное число α. Докажите, что для любого натурального N существуют такие целые p и q, что $1 \leqslant q \leqslant N$ и $|p-q\alpha| < \frac{1}{N}$.
(b) Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных p и q, что $|\frac{p}{q}-\sqrt{d}| < \frac{1}{q^2}$.

7. **(Теорема Кронекера)** Дано иррациональное α и действительные $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Докажите, что существует такое натуральное n, что $a < \{n\alpha\} < b$.