

Асимптотика

1. Каких чисел не превосходящих 10^{2022} больше: точных квадратов или представимых в виде суммы куба и шестой степени?
2. Докажите, что существует число, большее 1000000, которое нельзя представить в виде суммы квадрата и куба натуральных чисел.
3. Докажите, что при некотором натуральном N уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = N$ имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.
4. Докажите, что для любого натурального числа n существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы n слагаемых, каждое из которых является n -й степенью натурального числа.
5. Существует ли квадратный трёхчлен, все значения которого в натуральных точках — степени двойки?

Теперь чуть более комбинаторно

6. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали прямоугольник (со сторонами, параллельными линиям клеток).
7. Двое игроков играют в игру, первый каждым своим ходом отмечает одну красную точку, а второй — 100 синих точек. Докажите, что первый за несколько ходов сможет построить правильный треугольник с вершинами в красных точках.
8. Петя и Вася играют по очереди закрашивают клетки бесконечной белой клетчатой плоскости. За один ход Петя закрашивает 11 клеток зелёным, а Вася — 10 клеток красным. Перекрашивать клетки нельзя. Петя хочет нарисовать полностью зелёный квадрат 10 на 10. Сможет ли Вася ему помешать?
9. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшиеся обойти конем (побывав на каждой по одному разу)?
10. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали квадрат (со сторонами, параллельными линиям клеток).