Раскраски графов

Раскраска вершин графа в несколько цветов называется *правильной*, если никакие две вершины одного цвета не соединены ребром.

1. Степень любой вершины графа не превосходит n. Докажите, что его можно покрасить в $n+1$ цвет правильным образом.

2. В графе 1000 вершин, причем степень каждой не больше 9. Докажите, что можно выбрать такой подграф на 200 вершинах, что в нем не будет нечетных циклов.

3. Степень любой вершины графа не превосходит d. Докажите, что вершины этого графа заведомо можно покрасить в d^2+1 цвет так, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами одинакового цвета было больше двух. (Расстоянием между двумя вершинами графа называется число рёбер в самом коротком пути, соединяющем эти две вершины.)

4. Дан связный граф. Известно, что если из него выкинуть все рёбра любого нечётного цикла, то граф потеряет связность. Докажите, что вершины этого графа можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

5. **(a)** В графе не более $2n-2$ вершин и нет треугольников. Докажите, что граф можно правильным образом покрасить в n цветов.
(b) В графе нет треугольников, а среди любых n рёбер есть два, выходящих из одной вершины. Докажите, что граф можно правильным образом покрасить в n цветов

6. В вершинах связного графа можно так расставить натуральные числа, не превосходящие n, чтобы в вершинах, соединённых ребром, всегда стояли разные числа. Докажите, что это можно сделать так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь, состоящий из рёбер, у которых числа в концах отличаются ровно на 1.

7. Дана фиксированная раскраска графа в k цветов. Известно, что этот граф нельзя правильно раскрасить в $k-1$ цвет. Докажите, что в нём найдётся простой путь, содержащий ровно по одной вершине каждого из k цветов.