

Теория цифр

1. Пусть t — натуральное число. Докажите, что существует число, начинающееся на 202020212022 и делящееся на t .
2. Пусть t — нечётное натуральное число, не кратное 5. Докажите, что найдётся число, состоящее только из единиц и кратное t .
3. Существует ли число n , у которого все цифры больше 5, при этом у числа n^2 все цифры меньше 5?
4. Можно ли найти такую степень тройки, что у неё подряд в каком-то месте идут 100500 нулей?
5. (а) Докажите, что для любого натурального k найдётся число, состоящее из нечётных цифр и кратное 5^k .
(б) Докажите, что для любого нечётного t найдётся число, состоящее из нечётных цифр и кратное t .
6. Дано натуральное m . Может ли натуральное число, делящееся на $\underbrace{111\dots 11}_m$, иметь сумму цифр меньше m ?
7. Докажите, что для любого натурального n существует такое n -значное число, состоящее из ненулевых цифр, что оно делится на сумму своих цифр.
8. Докажите, что найдётся такое натуральное b , что для любого $n > b$ число $n!$ имеет сумму цифр больше 10^6 .
9. Обозначим за $S(x)$ сумму цифр числа x . Докажите, что существует бесконечно много натуральных n , что
 - (а) $S(3^n) \geq S(3^{n+1})$
 - (б) $S(2^n) \geq S(2^{n+1})$