Снова многочлены с целыми коэффициентами

1. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Оказалось, что $P(a) = b$ и $P(b) = a$ для некоторых двух различных целых a и b. Докажите, что у $P(x) - x$ не более одного целого корня.

2. Пусть несократимая дробь $\frac{a}{b}$ — корень многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что при любом целом k значение $P(k)$ делится на $bk - a$.

3. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 10$ с целыми коэффициентами. Докажите, что у уравнения $P(x)^2 = 1$ не более n целых решений.

4. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами найдётся такое целое число k, что

(a) число $|P(k)|$ будет составным.

(b) числа $|P(k)|, |P(k + 1)|, \ldots, |P(k + 2021)|$ будут составными.

5. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

6. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(2^n)$ делится на n для любого натурального n?

7. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2021 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?