Прямые углы и вписанные четырехугольники

Проекцией точки на прямую называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту прямую.

1. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке P. Докажите, что медиана PM треугольника ABP перпендикулярна CD.

2. Через точку A проведены три прямые, образующие друг с другом углы $60°$. Докажите, что проекции любой точки B на эти прямые являются вершинами равностороннего треугольника.

3. **Прямая Симсона.** На описанной окружности треугольника ABC отметили точку P. Докажите, что проекции точки P на стороны треугольника лежат на одной прямой.

4. Диагонали вписанного четырехугольника пересекаются в точке P. Докажите, что проекции точки P на его стороны являются вершинами описанного четырехугольника.

5. Из точки P внутри треугольника ABC опустили перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на стороны BC, CA, AB; потом опустили перпендикуляры PA_2, PB_2, PC_2 на стороны треугольника $A_1B_1C_1$; и наконец опустили перпендикуляры PA_3, PB_3, PC_3 на стороны треугольника $A_2B_2C_2$. Докажите, что треугольники ABC и $A_3B_3C_3$ подобны.

6. Четырехугольник $ABCD$, не имеющий равных сторон, описан около окружности с центром I. Каждую из точек B и D спроецировали на каждую из прямых AI и CI. Докажите, что эти четыре проекции лежат на одной окружности.

7. Внутри окружности выбрана точка P. Рассмотрим все хорды этой окружности, проходящие через P. Докажите, что середины этих хорд лежат на одной окружности.

8. Докажите, что в остроугольном треугольнике середины двух высот, основание третьей и ортоцентр лежат на одной окружности.

9. Точка M — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC. Точка P такова, что $PA \parallel BC$. Точки X и Y выбраны на продолжениях PB и PC за точки B и C соответственно так, что $\angle PXM = \angle PYM$. Докажите, что четырехугольник $APXY$ вписан.

10. Точка A' симметрична середине меньшей дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC относительно стороны BC. Точки B' и C' определяются аналогично. Докажите, что окружность $(A'B'C')$ проходит через ортоцентр треугольника ABC.