

Алгебраический взгляд на числа Фибоначчи.

Если кто не помнит, числами Фибоначчи называют такую последовательность $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Докажите тождества:

(a) $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$;

(b) $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

(c) $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;

(d) $F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \dots + nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$

2. (a) Найдите такие a и b , для которых $F_{n+4} = aF_{n+1} + bF_n$.

(b) Докажите, что $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} = F_{n+1}F_{m+1} - F_{n-1}F_{m-1}$.

3. Докажите, что

(a) $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$;

(b) $F_{n+1} = \frac{F_n + \sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n}}{2}$.

4. Докажите, что $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

Остатки и делимость.

5. (a) Докажите, что для любого n найдётся число Фибоначчи, кратное n .

(b) Докажите, что существует число Фибоначчи, оканчивающееся на 9999.

(c) Дано простое число p . Докажите, что среди любых $p + 1$ последовательных чисел Фибоначчи найдётся кратное p .

6. (a) Даны натуральные $a, b > 2$. Докажите, что F_a делится на F_b тогда и только тогда, когда a делится на b .

(b) Докажите, что $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

Разное.

7. Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.