Комбинаторная геометрия

1. **(a)** Можно ли расставить на площади 6 фотографов так, чтобы каждый мог сфотографировать ровно четырех других? (Один фотограф может сфотографировать другого, если на отрезке между ними никого нет).

(b) При каких n можно расставить фотографов так, чтобы каждый мог сфотографировать $n-2$ других?

2. Дан выпуклый четырёхугольник. Если провести в нем любую диагональ, он разделится на два равнобедренных треугольника. А если провести в нем обе диагонали сразу, он разделится на четыре равнобедренных треугольника. Обязательно ли этот четырёхугольник — квадрат?

3. На плоскости отмечены 2022 точки, причем из любых трёх можно выбрать пару, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что их все можно покрыть двумя кругами радиуса 1.

4. Обозначим через a наибольшее число непересекающихся кругов диаметра 1, центры которых лежат внутри многоугольника M, через b — наименьшее число кругов радиуса 1, которыми можно покрыть весь многоугольник M. Какое число больше: a или b?

5. Несколько кругов с суммой радиусов 20 расположены внутри квадрата 13×13 . Докажите, что можно провести прямую, которая гарантированно пересечет хотя бы 4 круга.

6. Архитектор хочет расположить семь высотных зданий так, чтобы, гуляя по городу, можно было увидеть их шпили в любом (циклическом) порядке. Удастся ли это ему?

7. Куб разбит на много маленьких кубиков. Докажите, что среди них найдутся хотя бы два одинаковых.

8. На плоскости расположено n точек ($n > 3$), никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что среди треугольников с вершинами в данных точках остроугольные треугольники составляют не более трёх четвертей.